C179

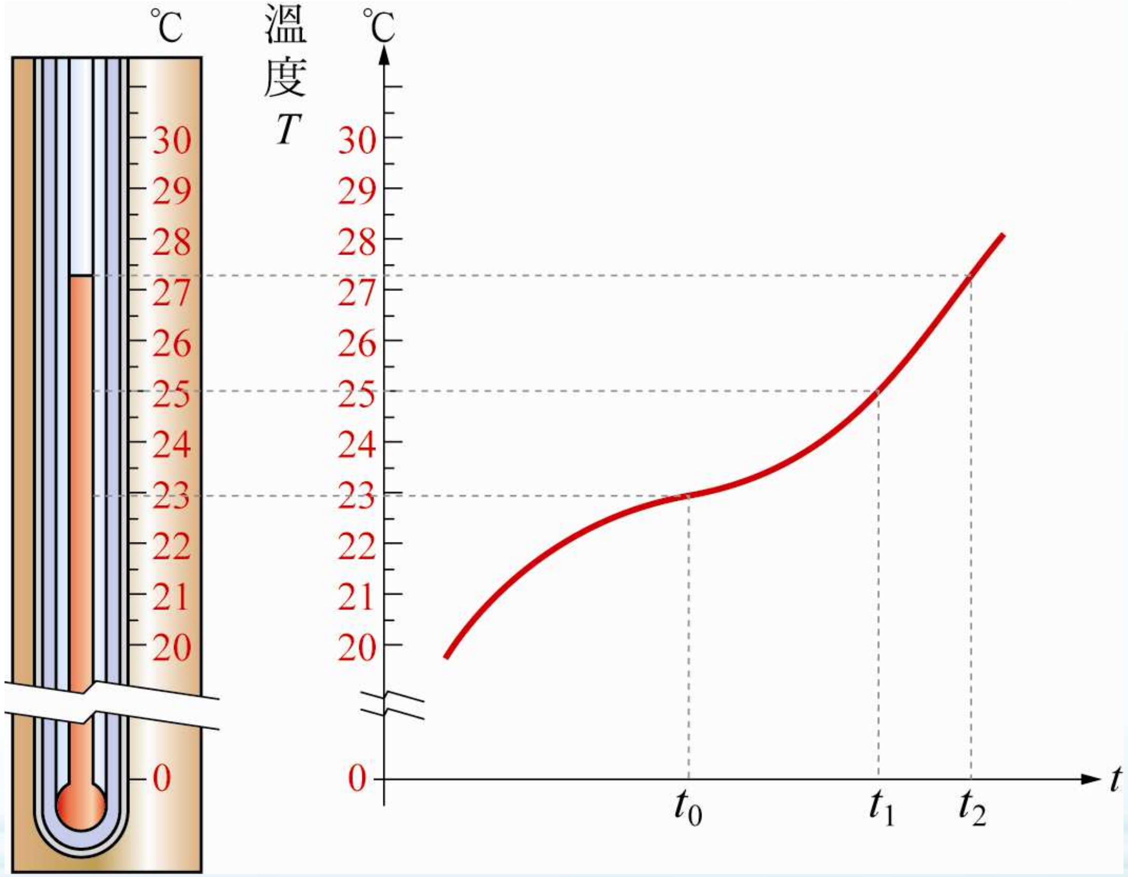
數位邏輯

第1章概　論

SINCE1997
勁園文化事業股份有限公司
台科大圖書股份有限公司

1-1 數量表示法

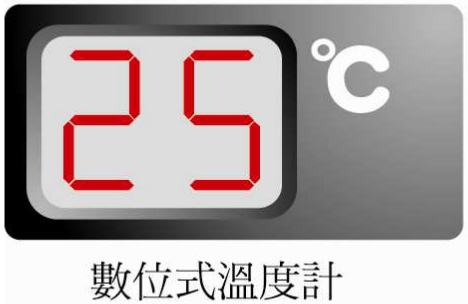
類比表示法是一種“連續的數量表示法

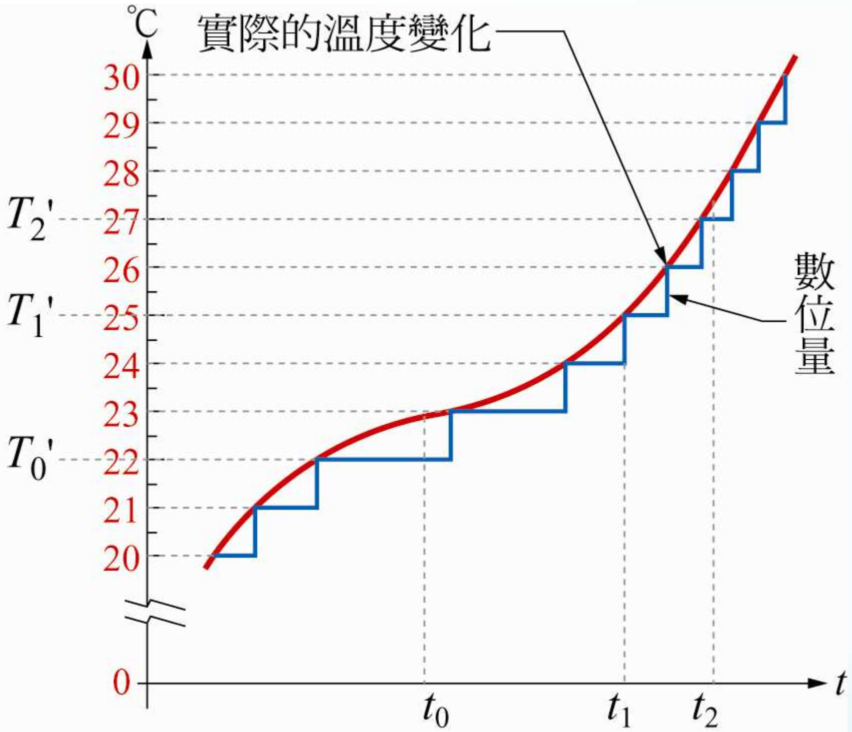


溫度變化的類比量

1-1 數量表示法

數位表示法事實上就是一種"不連續的、近似的數量表示法"。

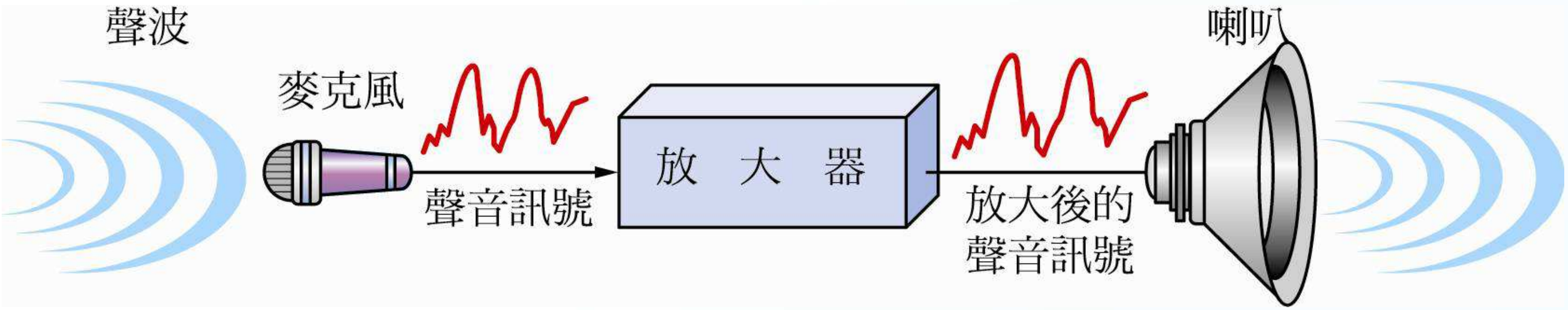




溫度變化記錄的數位量

1-2 數位系統和類比系統

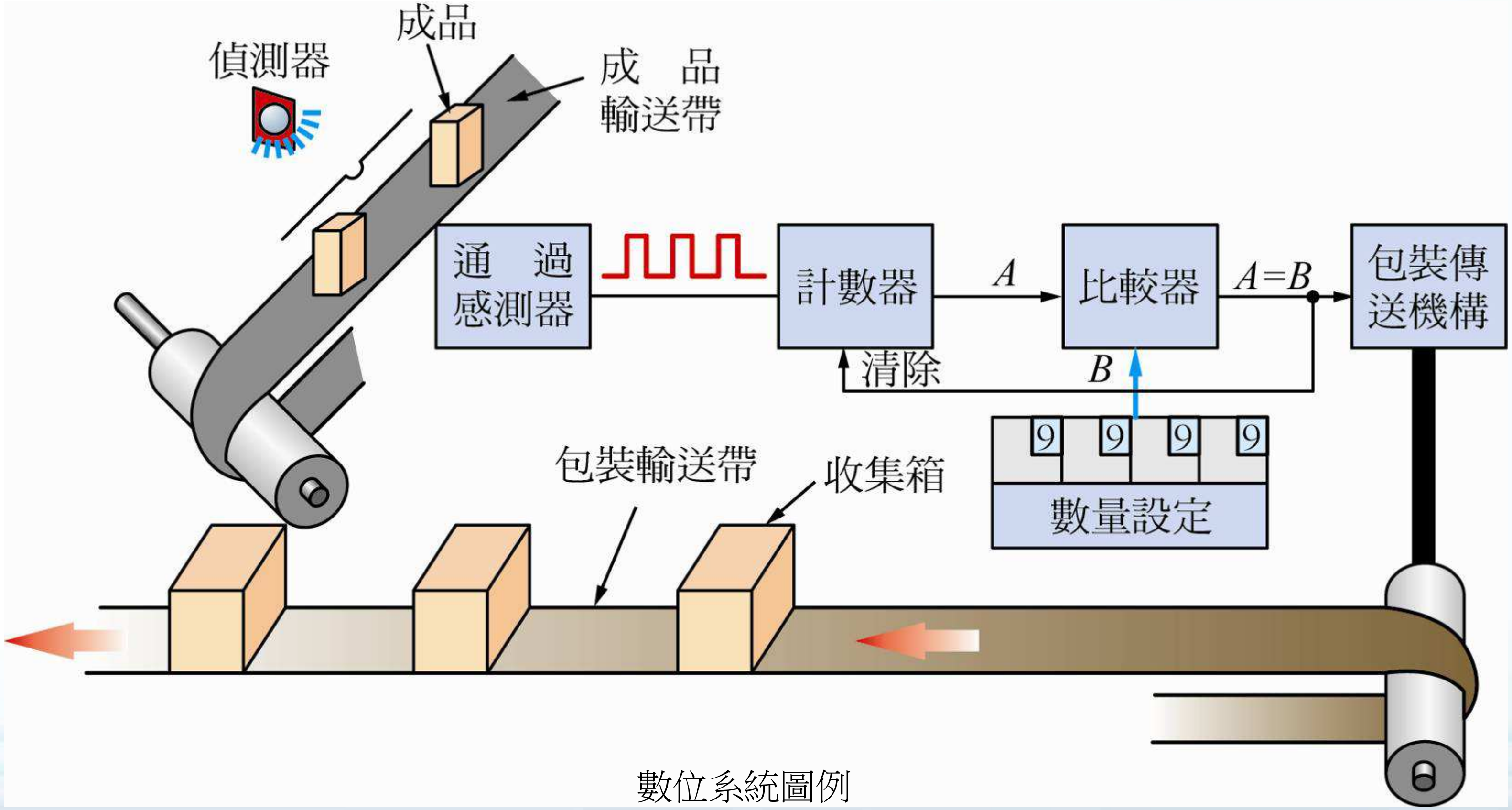
數位系統：系統處理過程的信號都是類比的，由類比電路所構成。



類比系統圖例

1-2 數位系統和類比系統

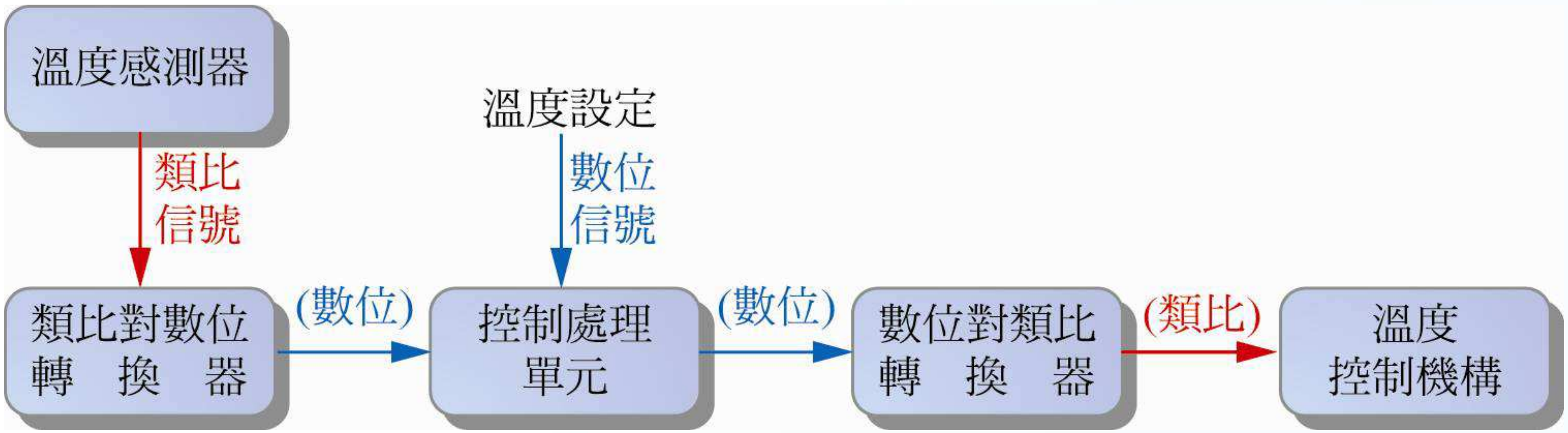
數位系統：系統處理的信號是數位式的，由數位電路所構成。



數位系統圖例

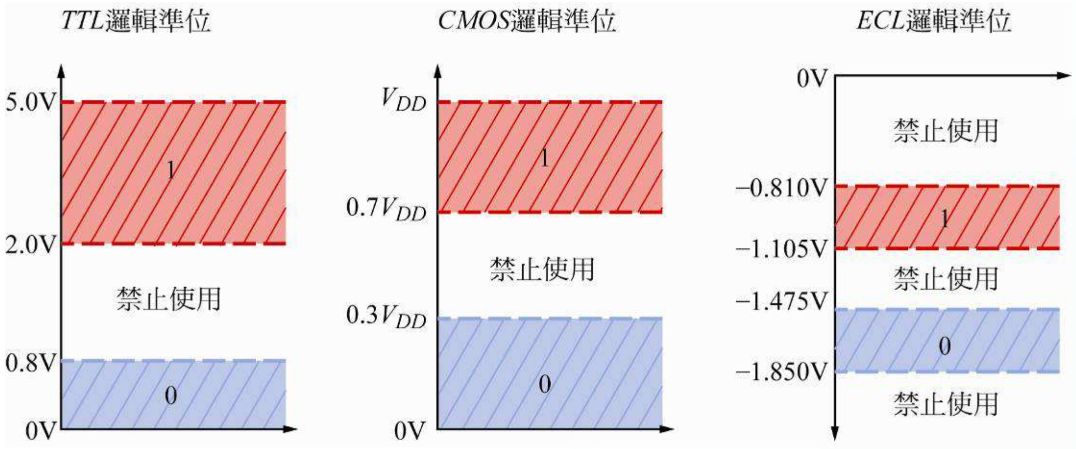
數位系統和類比系統

混合系統：系統由類比電路與數位電路組合而成,故稱為混合系統。



恆溫控制系統

1-3 邏輯準位



邏輯準位

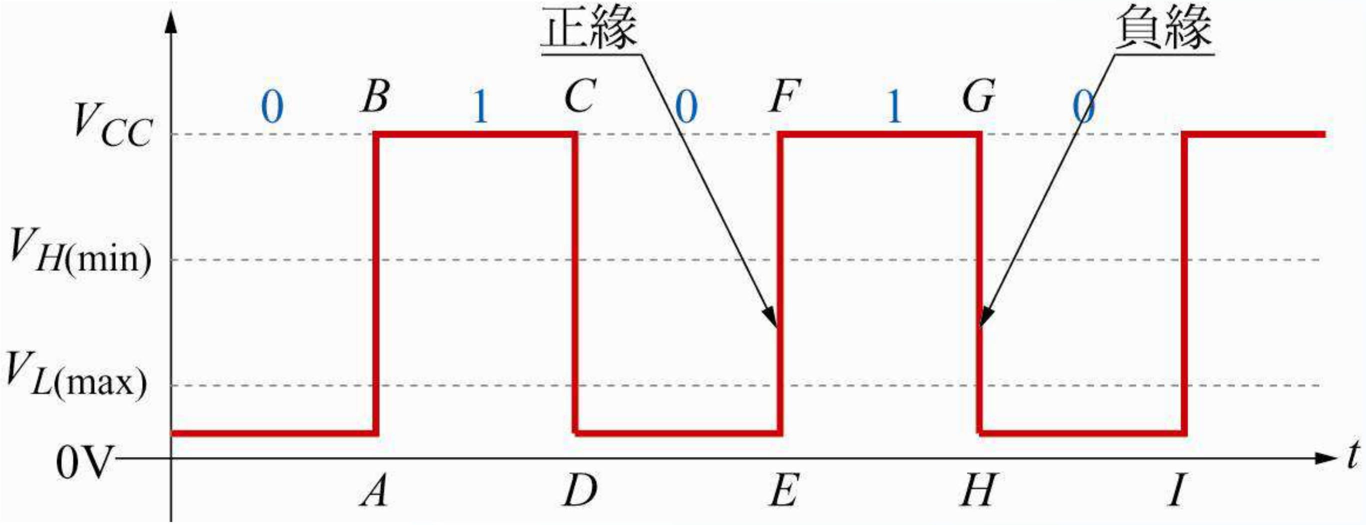
邏輯準位比較圖

邏輯族 / 電壓 / 項目	TTL（電晶體—電晶體邏輯）	CMOS（互補式金屬氧化物半導體邏輯）	ECL（射極耦合邏輯）
電源電壓	V_{CC}＝+5V	V_{DD}＝V_{DD} V_{SS}＝GND	V_{CC1}＝V_{CC2}＝0V V_{EE}＝−5.2V
V_{IH}（邏輯1準位）	2.0V 以上	0.7 V_{DD} 以上	−1.105V 以上
V_{IL}（邏輯0準位）	0.8V 以下	0.3 V_{DD} 以下	−1.475 以下

1-3

邏輯準位

脈波信號



數位脈波

數位積體電路

數位積體電路

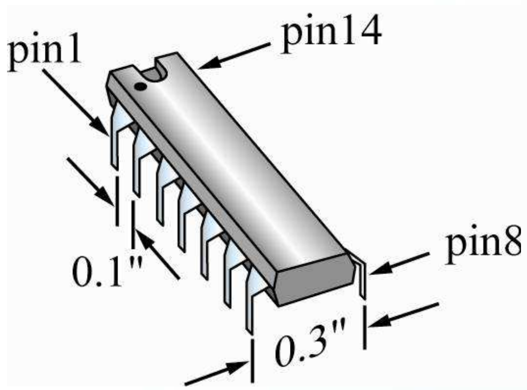
可分為四種：

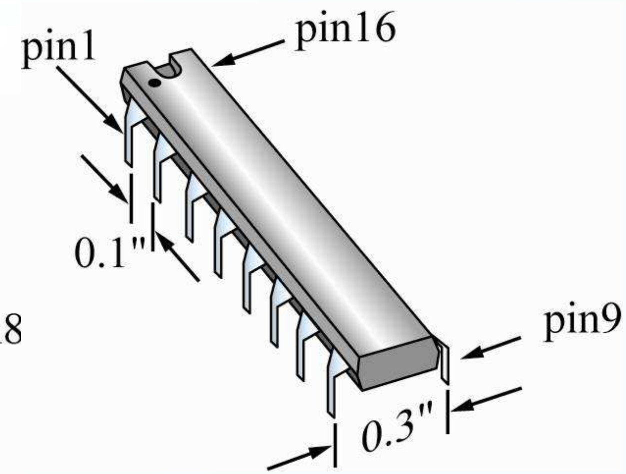
1.小型積體電路 , SSI
每顆IC內含1～12個等效閘。

2.中型積體電路 , MSI
每顆IC內含13～99個等效閘。

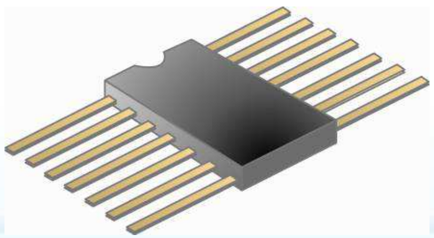
3.中型積體電路 , LSI
每顆IC內含100～9999個等效閘。

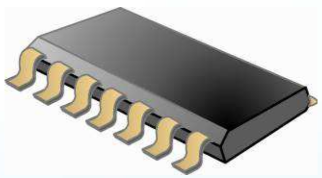
4.大型積體電路 , VLSI
每顆IC內含10000個以上的等效閘。

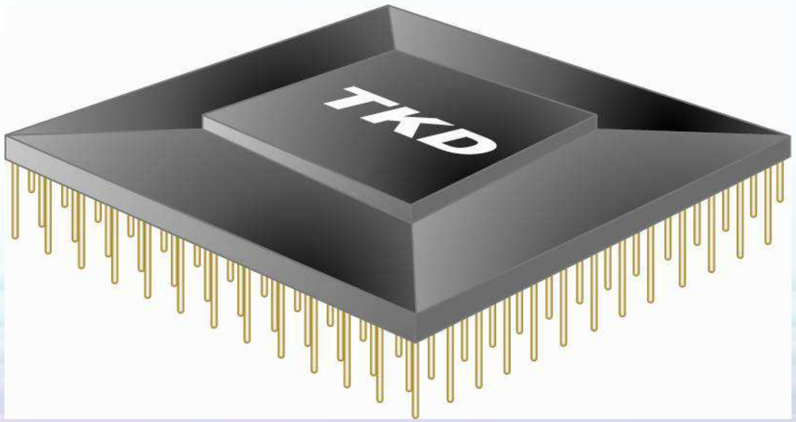




常用的DIP包裝積體電路







其他IC包裝

數位邏輯

第2章數字系統

SINCE1997
勁園文化事業股份有限公司
台科大圖書股份有限公司

2-1

数目系統

數目系統

十進制			二進制					八進制			十六進制		
		0					0			0			0
		1					1			1			1
		2				1	0			2			2
		3				1	1			3			3
		4			1	0	0			4			4
		5			1	0	1			5			5
		6			1	1	0			6			6
		7			1	1	1			7			7
		8		1	0	0	0		1	0			8
		9		1	0	0	1		1	1			9
	1	0		1	0	1	0		1	2			A
	1	1		1	0	1	1		1	3			B
	1	2		1	1	0	0		1	4			C
	1	3		1	1	0	1		1	5			D
	1	4		1	1	1	0		1	6			E
	1	5		1	1	1	1		1	7			F
	1	6	1	0	0	0	0		2	0		1	0
	1	7	1	0	0	0	1		2	1		1	1
	1	8	1	0	0	1	0		2	2		1	2
	1	9	1	0	0	1	1		2	3		1	3
	2	0	1	0	1	0	0		2	4		1	4
	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮

常用數目系統的累進值

數目系統的互換

加權值 →	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	.	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}		
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑		
數　量 →	D_4	D_3	D_2	D_1	D_0	.	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	···	···

加權遞增方向 ← ↑ → 加權遞減方向

小數點

十進位表示法各位數的加權值

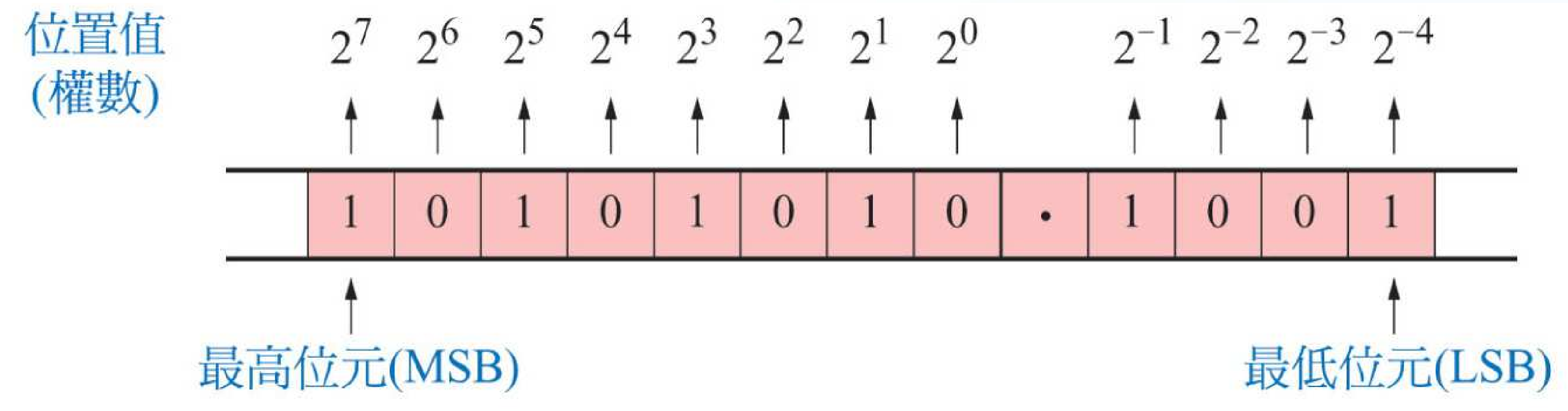
權值 →	······	r^4	r^3	r^2	r^1	r^0	.	r^{-1}	r^{-2}	r^{-3}	r^{-4}	······
		↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
數量 →	······	N_4	N_3	N_2	N_1	N_0	.	n_1	n_2	n_3	n_4	······

r進位表示法各位數的加權值

數目系統的互換

將 $N_4\ N_3\ N_2\ N_1\ N_0\ \cdot\ n_1\ n_2\ n_{3(r)}$ 轉換為十進制，則其十進制值

$$D = N_4 r^4 + N_3 r^3 + N_2 r^2 + N_1 r^1 + N_0 r^0 + n_1 r^{-1} + n_2 r^{-2} + n_3 r^{-3}$$



二進位數的加權數

2-2 數目系統的互換

1.整數採連除法，將十進制整數連續除以r，直到商數等於0為止，再將其餘數由下往上計列。
2.小數採連乘法，將十進位小數部份連續乘以r，直到小數部份為0或獲得滿意之位數為止，再將其整數部份由上往下列。

十進制轉二進制

例如將25轉化為二進制

2	25	
	12	……餘數 1
	6	……餘數 0
	3	……餘數 0
	1	……餘數 1
	0	……餘數 1

由下往上記列

故 25 = 11001B

例如要將0.3變成二進位時：

$0.3 \times 2 = 0.6$	進位 0
$0.6 \times 2 = 1.2$	進位 1
$0.2 \times 2 = 0.4$	進位 0
$0.4 \times 2 = 0.8$	進位 0
$0.8 \times 2 = 1.6$	進位 1
$0.6 \times 2 = 1.2$	進位 1

由上往下記列

故 $0.3 \fallingdotseq 0.010011$B

2-2 數目系統的互換

十進制轉八進制

例如將259.24轉換成八進制數，則

$8\,\underline{|259}$

$\underline{|32}$ ………餘數 3

$\underline{|4}$ ………餘數 0

0 ………餘數 4

得 $259 = 403_{(8)}$

$0.24 \times 8 = 1.92$……進位 1

$0.92 \times 8 = 7.36$……進位 7

$0.36 \times 8 = 2.88$……進位 2

$0.88 \times 8 = 7.04$……進位 7

⋮

得 $0.24 \fallingdotseq 0.1727_{(8)}$

故得 $259.24 = 403.1727_{(8)}$

數目系統的互換

八進制改成二進制：

將每個八進位數用三個位元的二進位數來取代，再將二進位數依序組合。

5	3	.	4	7
↓	↓		↓	↓
101	011		100	111

故得 $53.47_{(8)} = 101011.100111B$

2-2 數目系統的互換

二進制改八進制：

將二進制數以小數點為基準，分別向左、向右取三位元為一組，不足三位元者補0，再將其分別以八進制數取代記列。

例如：將 1010.01101B 轉成 8 進制，則：$\underline{001}\ \underline{010}.\underline{011}\ \underline{010}$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}$$

故 $1010.01101B = 12.32_{(8)}$

2-2 數目系統的互換

十進制轉換成十六進制

例如將1247.74轉換成十六進制則

$$
\begin{array}{r|l}
8 & 259 \\ \hline
8 & 32 \quad \cdots\cdots\cdots \text{餘數 } 3 \\ \hline
 & 4 \quad \cdots\cdots\cdots \text{餘數 } 0 \\ \hline
 & 0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{餘數 } 4
\end{array}
$$

得 $259 = 403_{(8)}$

$0.24 \times 8 = 1.92 \cdots\cdots$ 進位 1

$0.92 \times 8 = 7.36 \cdots\cdots$ 進位 7

$0.36 \times 8 = 2.88 \cdots\cdots$ 進位 2

$0.88 \times 8 = 7.04 \cdots\cdots$ 進位 7

$\vdots$

得 $0.24 \fallingdotseq 0.1727_{(8)}$

故得 $259.24 = 403.1727_{(8)}$

2-2 數目系統的互換

二進制與十六進制的互換

例如將 1000001110.101B 轉成十六進制，

則：1000001110.101B → 0010 0000 1110 . 1010

0010	0000	1110	.	1010
↓	↓	↓		↓
2	0	E		A

故得 1000001110.101B = 20E.AH

2-2

數目系統的互換

十六進制轉成二進制：將每一個十六進制數分別以4位元的二進制數取代

則：	3	0	B	.	4	F
	↓	↓	↓		↓	↓
	0011	0000	1011		0100	1111

故得 30B.4FH = 1100001011.01001111B

2-3 二進制有號數的加減運算

※ 真值表示法

於最高位元（MSB）左邊加入符號位元，
若原數為正則 加 0；若原數為負則加1。

1的補數表示法

二進位負數取1的補數，只要將原數0變1、1變0

表 2-5 有號數的 1's 補數表示法

十進制數	1's 補數	
	符號位元	數值大小
⋮	⋮	⋮
+5	0	0000101
+4	0	0000100
+3	0	0000011
+2	0	0000010
+1	0	0000001
+0	0	0000000
−0	1	1111111
−1	1	1111110
−2	1	1111101
−3	1	1111100
−4	1	1111011
−5	1	1111010
⋮	⋮	⋮

表2-5　有號數的1s補數表示法

2-3

二進制有號數的加減運算

2 的補數表示法

2’s 補數＝ 1’s 補數+ 1

二進位負數取 2’s 補數，可依下面方法施行。

1. 將原數先轉成 1’s 補數，即將原數的每一位元 0 變 1，1 變 0。

2. 再將 1’s 補數加 1。

例如將－01101010B 取 2’s 補數

則　1’s 補數＝ 10010101B

故　2’s 補數＝ 1’s 補數 + 1

＝ 10010101B + 1

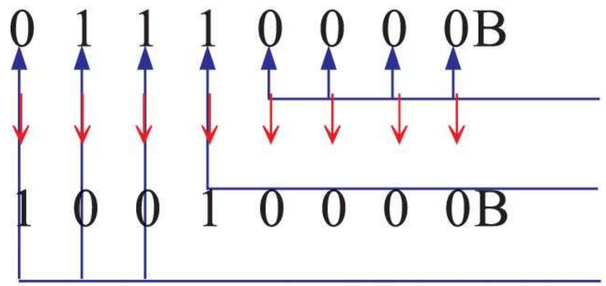
＝ 10010110B

2-3 二進制有號數的加減運算

將負數取 2's 補數的直接轉換法如下：

1. 將原數由最低位元開始往高位元審視，遇到 0 則記 0。
2. 遇到第 1 個 1 保留記 1。
3. 第 1 個 1 以後的每一個位元將 1 變 0，0 變 1。

2-3 二進制有號數的加減運算



←原數

←2's 補數

由低位元開始遇到 0 記 0

遇第 1 個 1 保留 1

第1個1 以後 1 變 0，0 變 1

二進制有號數的加減運算

一般數位運算或電腦作業有號數大致都是以 2's 補數表示法來表達。若某數的 MSB = 0 則表正數，MSB = 1 則表負數。

有號數的 2's 補數表示法

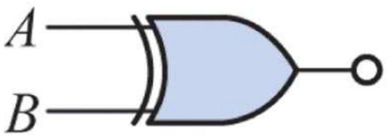
十進制數	2's 補數	
	符號位元	數值
⋮	⋮	⋮
7	0	0000111
6	0	0000110
5	0	0000101
4	0	0000100
3	0	0000011
2	0	0000010
1	0	0000001
0	0	0000000
−1	1	1111111
−2	1	1111110
−3	1	1111101
−4	1	1111100
−5	1	1111011
−6	1	1111010
−7	1	1111001
−8	1	1111000

2-3 二進制有號數的加減運算

二進制有號數表示法之比較

項　目	0 的表示	表達範圍	使用效能
真值表示法	具 +0 與 −0	$-(2^{n-1}-1) \sim +(2^{n-1}-1)$	數值大小易於辨識，運算電路複雜。
1's 補數表示法	具 +0 與 −0	$-(2^{n-1}-1) \sim +(2^{n-1}-1)$	正負數轉換容易，可以加法做減法運算。
2's 補數表示法	0 值無正負	$-2^{n-1} \sim +(2^{n-1}-1)$	正負數轉換容易，可以加法做減法運算。

2-3 二進制有號數的加減運算



$y=\overline{A}B+A\overline{B}=A\oplus B$

A	B	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

互斥或閘符號與真值表

2-4 文數字碼與同位偵錯碼

N個資料要編碼，至少要用n位元的二進制數，其中n需滿足 $2^n \geq N$。
十進碼轉成BCD碼：將十進制數的每一個數字用等值的4位元二進制數直接取代。
BCD碼轉換十進制：以小數點為中心，分別向左、向右將原數分成4個位元一組（不足4位元補0），再直接轉換成等值的十進位數。

十進位	BCD 碼
	8421
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

二進碼十進數

加三碼

加三碼是將BCD碼加3而得

BCD碼與加三碼比較表

十進位	BCD	加三碼
0	0000	0011
1	0001	0100
2	0010	0101
3	0011	0110
4	0100	0111
5	0101	1000
6	0110	1001
7	0111	1010
8	1000	1011
9	1001	1100

2-4 文數字碼與同位偵錯碼

葛雷碼

葛雷碼（Gray code）是一種最小變化碼。
葛雷碼為無權數碼它並不適用於算術運算，只適用於一般輸入／輸出裝置和一些類比到數位轉換器上，以減少資料傳送與轉換時發生錯誤。

0到15之葛雷碼

十進位數	葛雷碼	二進位數
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0011	0010
3	0010	0011
4	0110	0100
5	0111	0101
6	0101	0110
7	0100	0111
8	1100	1000
9	1101	1001
10	1111	1010
11	1110	1011
12	1010	1100
13	1011	1101
14	1001	1110
15	1000	1111

2-4 文數字碼與同位偵錯碼

將1100B換成等值的葛雷碼，其變換步驟如下：

1	1	0	0	B	← 二進碼
↓	↓	↓	↓		
$\boxed{1}$	0	1	0	(Gray)	← 葛雷碼

故二進位數 1100 的葛雷碼就是 1010，即 $1100B = 1010_{(Gray)}$

文數字碼與同位偵錯碼

將$011001_{(Gray)}$轉換成二進位，則：

0	1	1	0	0	1	(Gray)
+	+	+	+	+		
$\boxed{0}$	1	0	0	0	1	B

故　$011001_{(Gray)} = 010001B$

2-4 文數字碼與同位偵錯碼

美國標準資訊交換碼

7位元的ASCII碼

	行	0	1	2	3	4	5	6	7
列	BITS 765 4321	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
1	0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
2	0010	STX	DC2	”	2	B	R	b	r
3	0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
4	0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
5	0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
6	0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
7	0111	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w

【待續，下一頁】

2-4 文數字碼與同位偵錯碼

美國標準資訊交換碼

8	1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
9	1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
10	1010	LT	SUB	*	:	J	Z	j	z
11	1011	VT	ESC	+	;	K	〔	k	{
12	1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
13	1101	CR	GS	-	=	M	〕	m	}
14	1110	SO	RS	.	>	N	(↑)	n	～
15	1111	SI	US	/	?	O	—(←)	o	DEL

7位元的ASCII碼

C179

數位邏輯

第3章數字系統

3-2 布林代數的基本運算

3-3 布林定理

3-4 第摩根定理

SINCE1997
勁園文化事業股份有限公司
台科大圖書股份有限公司

布林代數的基本運算

"或"運算

運算類型	簡稱	運算符號	運算式
邏輯加法	OR	$+$	$X = A + B$
邏輯乘法	AND	$\cdot$	$X = A \cdot B$
邏輯補數	NOT	$-$	$X = \overline{A}$

布林代數的基本運算

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 0$$

$$1 + 1 = 1$$

3-2

布林代數的基本運算

“及”運算

$0 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 1 = 0$

$1 \cdot 0 = 0$

$1 \cdot 1 = 1$

$\overline{0}=1$　　$\overline{1}=0$

3-3 布林定理

單變數定理

定　理	加　法	定　理	乘　法	特　性
T_1	$X+0=X$	T_1'	$X \cdot 1 = X$	自識律 (identify law)
T_2	$X+1=1$	T_2'	$X \cdot 0 = 0$	
T_3	$X+X=X$	T_3'	$X \cdot X = X$	
T_4	$X+\overline{X}=1$	T_4'	$X \cdot \overline{X} = 0$	自反律 (complement law)
T_5	$\overline{\overline{X}}=X$			

單變數定理

3-3 布林定理

多變數定理

定　理	加　法	定　理	乘　法	特　性
T_6	$X + Y = Y + X$	T_6'	$XY = YX$	交換律
T_7	$X + Y + Z$ $= (X + Y) + Z$ $= X + (Y + Z)$	T_7'	XYZ $= (XY)Z$ $= X(YZ)$	結合律
T_8	$X + YZ$ $= (X + Y)(X + Z)$	T_8'	$X(Y + Z)$ $= XY + XZ$	分配律
T_9	$X + \overline{X}Y = X + Y$	T_9'	$X(\overline{X} + Y) = XY$	

多變數定理

3-3 布林定理

$X+YZ=(X+Y)(X+Z)$可擴大活用：

1. $A+BCD=(A+B)(A+C)(A+D)$
2. $A+B+CDE=(A+B+C)(A+B+D)(A+B+E)$
3. $AB+C+D=(A+C+D)(B+C+D)$

$X+\overline{X}Y=X+Y$其可能出現類型：

1. $\overline{A}+AB=\overline{A}+B$
2. $A+\overline{A}\,\overline{B}=A+\overline{B}$
3. $\overline{A}+A\overline{B}=\overline{A}+\overline{B}$
4. $A+\overline{A}BC=A+BC$

3-4

第摩根定理

第摩根定理

定理 T_{10} ：$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

定理 T'_{10}：$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0

$\overline{A+B}$ 與 $\overline{A}\cdot\overline{B}$ 真值表

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A\cdot B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

$\overline{A\cdot B}$ 與 $\overline{A}+\overline{B}$ 真值表

活用：

$$\overline{X_0+X_1+X_2\cdots X_n}=\overline{X}_0\cdot\overline{X}_1\cdot\overline{X}_2\cdots\cdot\overline{X}_n$$

$$\overline{X_0X_1X_2\cdots X_n}=\overline{X}_0+\overline{X}_1+\overline{X}_2+\cdots+\overline{X}_n$$

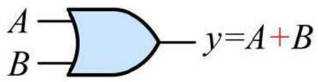
數位邏輯

第4章數字系統

SINCE1997
勁園文化事業股份有限公司
台科大圖書股份有限公司

4-1 或閘與及閘

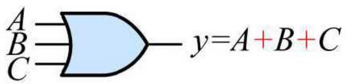
或閘



OR閘

輸入		輸出
A	B	$y=A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

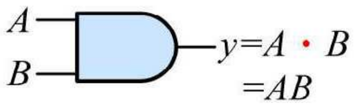
二輸入OR閘的符號與真值表



輸入			輸出
A	B	C	$y=A+B+C$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

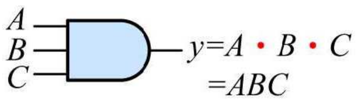
三輸入OR閘的符號和真值表

4-1 或閘與及閘



輸入		輸出
A	B	y=AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

二輸入AND閘符號與真值表

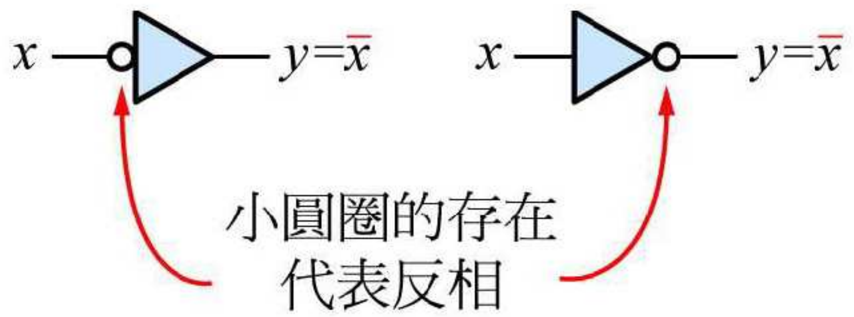


輸入			輸出
A	B	C	y=ABC
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

三輸入AND閘符號與真值表

4-2 反閘、反或閘與反及閘

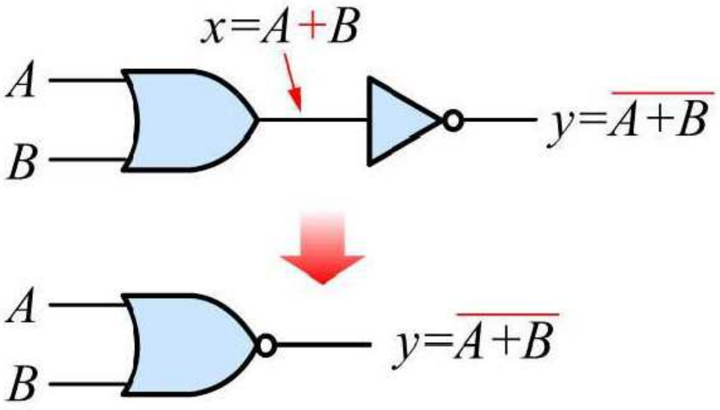
反閘



x	$y=\overline{x}$
0	1
1	0

4-2 反閘、反或閘與反及閘

反或閘

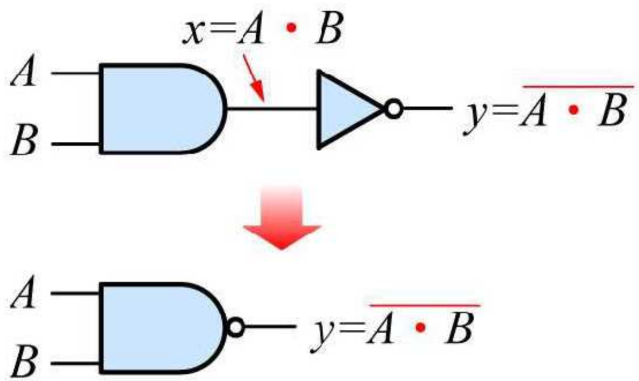


		OR	NOR
A	B	$x=A+B$	$y=\overline{x}=\overline{A+B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

反或閘符號與真值表

4-2 反閘、反或閘與反及閘

反及閘

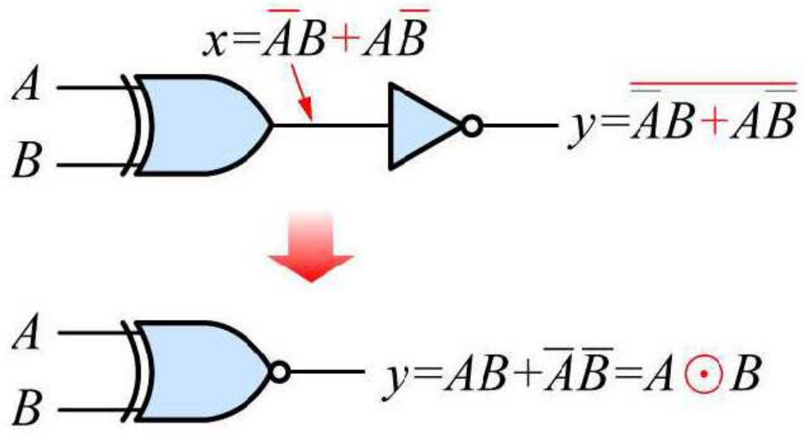


		AND	NAND
A	B	$x = A \cdot B$	$x = \overline{A \cdot B}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

二輸入反及閘符號與真值表

互斥或閘與互斥反或閘

互斥反或閘

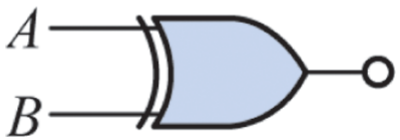


輸入		輸出
A	B	$y=A\odot B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

互斥或閘符號與真值表

互斥或閘與互斥反或閘

互斥反或閘



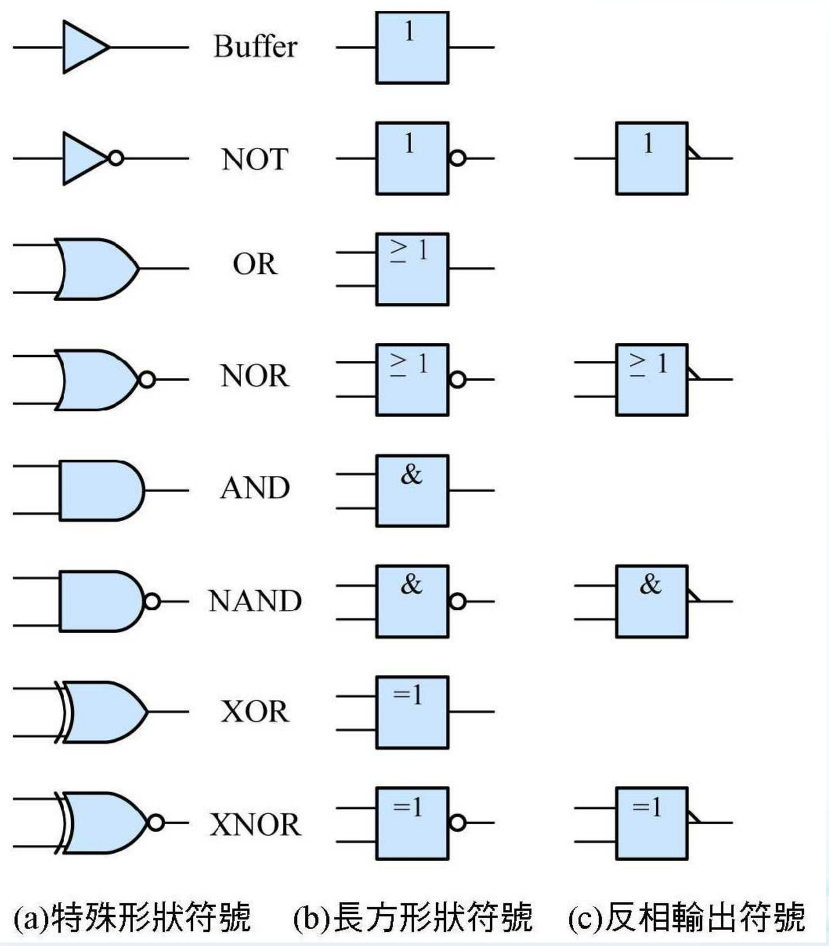
$y=\overline{A}B+A\overline{B}=A\oplus B$

A	B	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

互斥或閘符號與真值表

4-4 IEEE標準符號與商用包裝

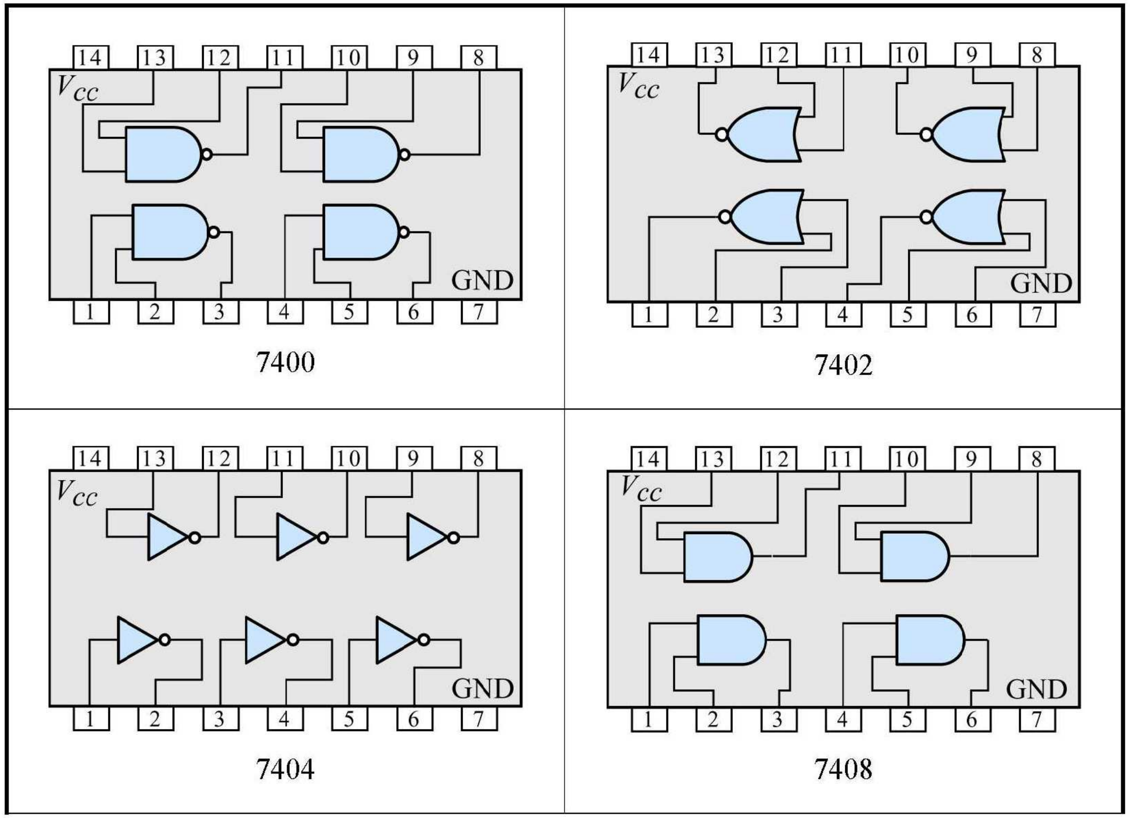
IEEE標準符號



數位邏輯符號

IEEE標準符號與商用包裝

邏輯閘的商用包裝



常用邏輯閘接腳圖

數位邏輯

第5章布林代數化簡

SINCE1997
勁園文化事業股份有限公司
台科大圖書股份有限公司

5-1 布林代數式

布林代數：分為積項之和與和項之積兩種。
積項和式(SOP)：一個或一個以上的積項加在一起所形成的運算式。
和項積式(POS)：一個或一個以上的和項相乘所形成的運算式。

項　序（十進制）	輸入			標準積項（最小項）	標準和項（最大項）
	A	B	C		
0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=m_0$	$A+B+C=M_0$
1	0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}\,C=m_1$	$A+B+\overline{C}=M_1$
2	0	1	0	$\overline{A}\,B\,\overline{C}=m_2$	$A+\overline{B}+C=M_2$
3	0	1	1	$\overline{A}\,B\,C=m_3$	$A+\overline{B}+\overline{C}=M_3$
4	1	0	0	$A\,\overline{B}\,\overline{C}=m_4$	$\overline{A}+B+C=M_4$
5	1	0	1	$A\,\overline{B}\,C=m_5$	$\overline{A}+B+\overline{C}=M_5$
6	1	1	0	$A\,B\,\overline{C}=m_6$	$\overline{A}+\overline{B}+C=M_6$
7	1	1	1	$A\,B\,C=m_7$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=M_7$

三變數標準積項與標準和項的對照表

5-1 布林代數式

所謂標準積項和式就是指全部由標準積項（最小項）所組成的積項

$$f(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C+A\,\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}+ABC$$

$$\begin{array}{ccccc} 000 & 001 & 100 & 110 & 111 \end{array} \quad \leftarrow \text{代表的二進位數}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 4 & 6 & 7 \end{array} \quad \leftarrow \text{對應的十進位數}$$

$$= m_0 + m_1 + m_4 + m_6 + m_7 \quad \leftarrow \text{最小項之和}$$

$$= \Sigma(0,1,4,6,7) \quad \leftarrow \Sigma\text{ 函數}$$

5-1 布林代數式

標準和項積式就是指全部由標準和項（最大項）所組成的和項積式

$$f(A,B,C)=(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

$$\begin{array}{ccccl} 001 & 010 & 101 & 111 & \leftarrow \text{二進位數} \\ 1 & 2 & 5 & 7 & \leftarrow \text{十進位數} \\ = M_1 \cdot & M_2 \cdot & M_5 \cdot & M_7 & \leftarrow \text{最大項之和} \\ =\Pi(1,2,5,7) & & & & \leftarrow \Pi\ \text{函數} \end{array}$$

5-2 布林代數的獲得

積項和式的取得：將真值表中產生1輸出的標準乘積項OR起來。
和項積式的取得：將真值表中可使輸出為0的最大項“及”（乘）起來。

A	B	y	
0	0	0	$\rightarrow A+B$
0	1	0	$\rightarrow A+\overline{B}$
1	0	1	$\rightarrow A\overline{B}$
1	1	1	$\rightarrow AB$

$$y_{\text{POS}} = (A+B)(A+\overline{B})$$

$$y_{\text{SOP}} = A\overline{B}+AB$$

真值表與積項和關係

5-3 布林代數式簡化法

積項和式的化簡

1. 項目合併，如$xy+x\bar{y}=x(y+\bar{y})=x$。
2. 項目刪除，如$x+xy=x(1+y)=x$。
3. 刪除多餘，如$x+\bar{x}y=x+y$。
4. 加入多餘項，如乘上$(x+\bar{x})$，再重新整合。

和項積式的化簡

1. 檢視各和項，並儘量提出公因數，利用$(x+y)(x+z)=x+(y\cdot z)$，即提出x的公因數。
2. 利用$x\cdot\bar{x}=0$刪除不必要的和項。

5-4 卡諾圖

項序	A B	f
0	0 0	$\bar{A}\bar{B}=m_0$
1	0 1	$\bar{A}B=m_1$
2	1 0	$A\bar{B}=m_2$
3	1 1	$AB=m_3$

A \ B	$\bar{B}$ 0	B 1
$\bar{A}$ 0	$\bar{A}\bar{B}$ m_0	$\bar{A}B$ m_1
A 1	$A\bar{B}$ m_2	AB m_3

(a) 二變數卡諾圖

項序	A	B	C	f
0	0	0	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}=m_0$
1	0	0	1	$\bar{A}\bar{B}C=m_1$
2	0	1	0	$\bar{A}B\bar{C}=m_2$
3	0	1	1	$\bar{A}BC=m_3$
4	1	0	0	$A\bar{B}\bar{C}=m_4$
5	1	0	1	$A\bar{B}C=m_5$
6	1	1	0	$AB\bar{C}=m_6$
7	1	1	1	$ABC=m_7$

AB \ C	$\bar{C}$ 0	C 1
$\bar{A}\bar{B}$ 00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ m_0	$\bar{A}\bar{B}C$ m_1
$\bar{A}B$ 01	$\bar{A}B\bar{C}$ m_2	$\bar{A}BC$ m_3
AB 11	$AB\bar{C}$ m_6	ABC m_7
$A\bar{B}$ 10	$A\bar{B}\bar{C}$ m_4	$A\bar{B}C$ m_5

A \ BC	$\bar{B}\bar{C}$ 0 0	$\bar{B}C$ 0 1	BC 1 1	$B\bar{C}$ 1 0
$\bar{A}$ 0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ m_0	$\bar{A}\bar{B}C$ m_1	$\bar{A}BC$ m_3	$\bar{A}B\bar{C}$ m_2
A 1	$A\bar{B}\bar{C}$ m_4	$A\bar{B}C$ m_5	ABC m_7	$AB\bar{C}$ m_6

(b) 三變數卡諾圖

真值表與卡諾圖的關係

5-4 卡諾圖

項序	A	B	C	D	f
0	0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}=m_0$
1	0	0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D=m_1$
2	0	0	1	0	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}=m_2$
3	0	0	1	1	$\overline{A}\,\overline{B}CD=m_3$
4	0	1	0	0	$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}=m_4$
5	0	1	0	1	$\overline{A}B\overline{C}D=m_5$
6	0	1	1	0	$\overline{A}BC\overline{D}=m_6$
7	0	1	1	1	$\overline{A}BCD=m_7$
8	1	0	0	0	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}=m_8$
9	1	0	0	1	$A\overline{B}\,\overline{C}D=m_9$
10	1	0	1	0	$A\overline{B}C\overline{D}=m_{10}$
11	1	0	1	1	$A\overline{B}CD=m_{11}$
12	1	1	0	0	$AB\overline{C}\,\overline{D}=m_{12}$
13	1	1	0	1	$AB\overline{C}D=m_{13}$
14	1	1	1	0	$ABC\overline{D}=m_{14}$
15	1	1	1	1	$ABCD=m_{15}$

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$ 0 0	$\overline{C}D$ 0 1	CD 1 1	$C\overline{D}$ 1 0
$\overline{A}\,\overline{B}$ 00	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ m_0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$ m_1	$\overline{A}\,\overline{B}CD$ m_3	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$ m_2
$\overline{A}B$ 01	$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$ m_4	$\overline{A}B\overline{C}D$ m_5	$\overline{A}BCD$ m_7	$\overline{A}BC\overline{D}$ m_6
AB 11	$AB\overline{C}\,\overline{D}$ m_{12}	$AB\overline{C}D$ m_{13}	$ABCD$ m_{15}	$ABC\overline{D}$ m_{14}
$A\overline{B}$ 10	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ m_8	$A\overline{B}\,\overline{C}D$ m_9	$A\overline{B}CD$ m_{11}	$A\overline{B}C\overline{D}$ m_{10}

(c) 四變數卡諾圖

真值表與卡諾圖的關係（續）

卡諾圖

A	B	C	y	最小項
0	0	0	0	m_0
0	0	1	1	m_1
0	1	0	0	m_2
0	1	1	1	m_3
1	0	0	0	m_4
1	0	1	0	m_5
1	1	0	1	m_6
1	1	1	1	m_7

(a)真值表

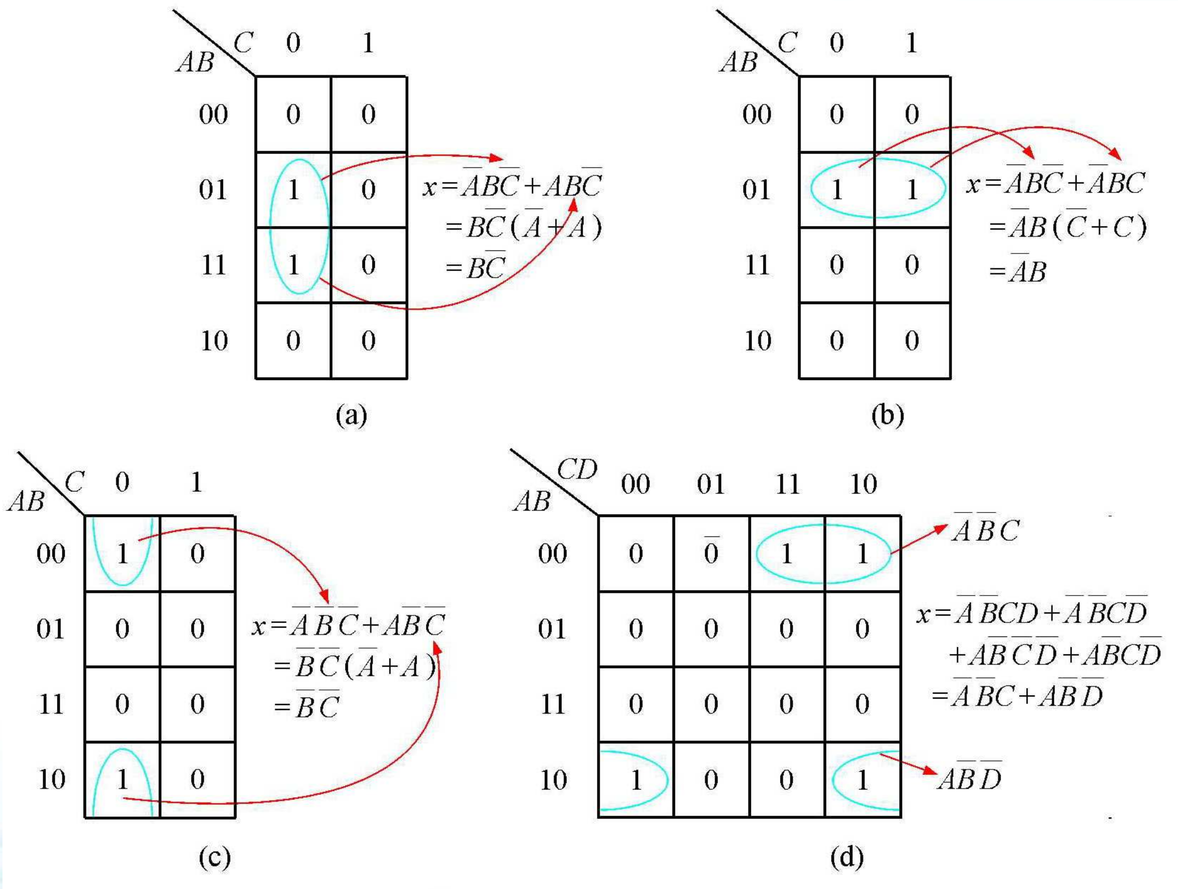
AB \ C	0	1
00	0 m_0	1 m_1
01	0 m_2	1 m_3
11	1 m_6	1 m_7
10	0 m_4	0 m_5

(b)卡諾圖

真值表與卡諾圖

卡諾圖

兩組對：若任意兩緊鄰的方格內值為1，必可消除一個變數，只留下未曾改變的變數。



二組對的例子

5-4 卡諾圖

四組對：有兩變數被消去，只留下未曾改變的變數。

AB \ C	0	1
00	0	1
01	0	1
11	0	1
10	0	1

(a) $x = C$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

(b) $x = AB$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

(c) $x = BD$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

(d) $x = \overline{A}C$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

(e) $x = \overline{B}D$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

(f) $x = A\overline{D}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

(g) $x = \overline{B}\,\overline{D}$

四組對的例子

卡諾圖

八組對：三個變數會被消掉，只留下未曾改變的變數。

$$
\begin{aligned}
x &= \overline{A}B + AB \\
&= B(\overline{A} + A) \\
&= B
\end{aligned}
$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

$\overline{A}B$

B

AB

(a) $x = B$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

(b) $x = \overline{C}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

(c) $x = \overline{B}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

(d) $x = \overline{D}$

八組對的例子

5-4 卡諾圖

卡諾圖若有需要，每一個空格皆可重複使用，與其它空格組合

卡諾圖化簡步驟歸納如下：

1.依真值表將輸出值（0或1）填入對應的卡諾圖方格中。
2.使用重複組對技巧，依序圈出八組對、四組對和二組對，使用重複組對技巧，以獲得「最大」的組對。
3.如果遺留下獨立的1未被組對，要個別圈出。
4.重新觀察組對，要讓所有1的空格都被圈到，而且圈選組對的總數要越少越好。
5.寫出各組對的簡化結果（組對中未曾改變的變數乘積），並將其OR起來，寫成布林等式。

簡化下列布林等式。

(1) $x(A,B,C,D)=\Sigma(2,5,7,11,13,15)$

(2) $y(A,B,C,D)=\Sigma(1,5,6,7,11,12,13,15)$

解 (1)將 x 函數代入卡諾圖，如圖(a)所示，其可圈得一個四組對、一個二組對與一個獨立 1，得

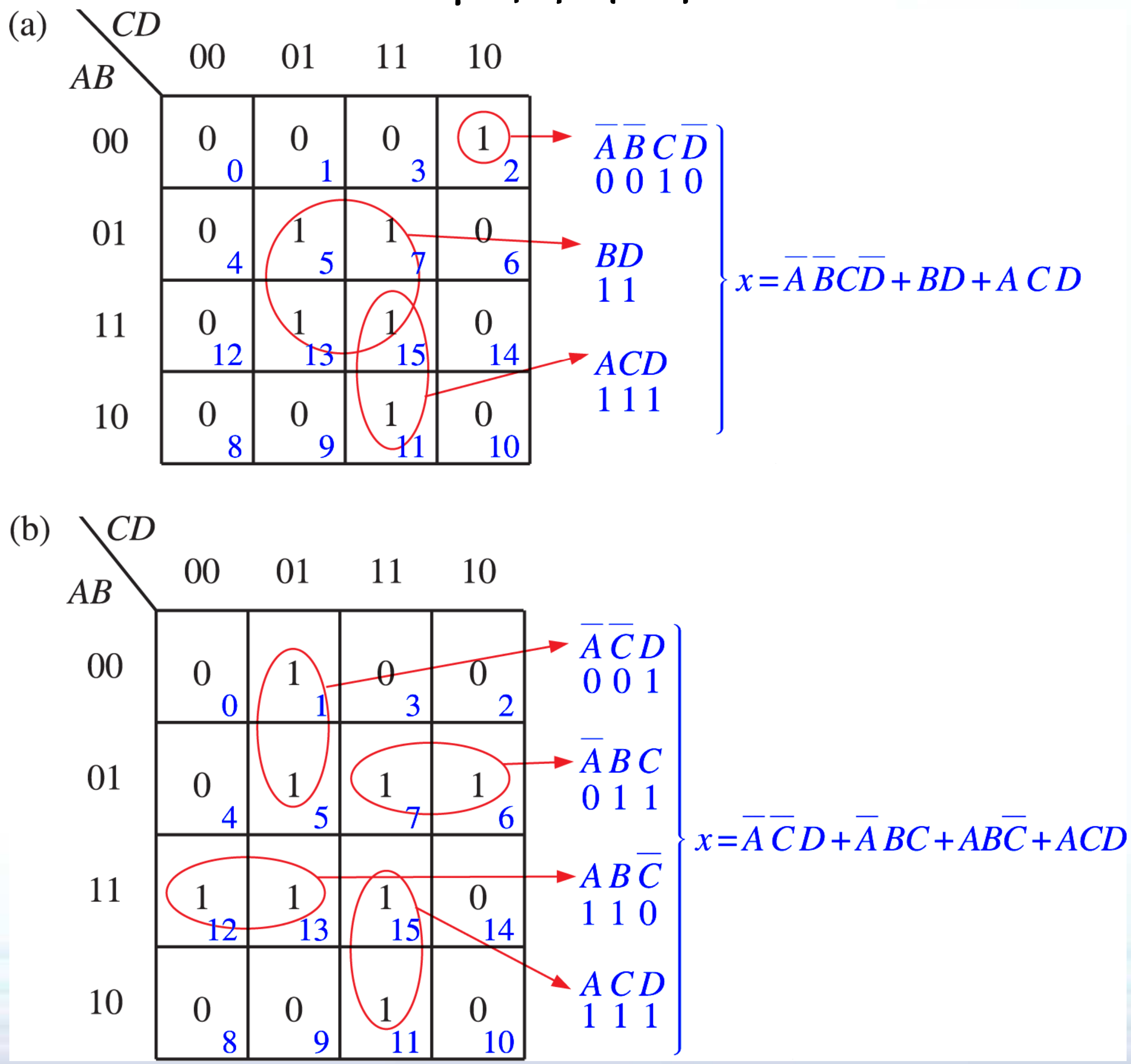
$$x=\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}+BD+ACD$$

(2)將 y 函數代入卡諾圖，如圖(b)所示，其可圈出四個二組對，得

$$y=\overline{A}\,\overline{C}D+\overline{A}BC+AB\overline{C}+ACD$$

5-4

卡諾圖


(a)
CD
AB
00 01 11 10
$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
0 0 1 0
BD
1 1
ACD
1 1 1
$x=\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+BD+ACD$
(b)
CD
AB
00 01 11 10
$\bar{A}\bar{C}D$
0 0 1
$\bar{A}BC$
0 1 1
$AB\bar{C}$
1 1 0
ACD
1 1 1
$x=\bar{A}\bar{C}D+\bar{A}BC+AB\bar{C}+ACD$

5-4 卡諾圖

積項和式的卡諾圖化簡法

1.將各積項的變數原形用1、補數用0、缺項用×來取代。
2.將各積項所能代表的二進位數轉成十進制。
3.將積和式改寫成最小項組成的∑函數，再代入卡諾圖化簡。

試化簡 $x=\overline{A}+\overline{B}C+ABC$。

解 (1)先將布林代數式轉成標準積項和式，由 $x=\overline{A}+\overline{B}C+ABC$ 可知 x 函數至少具有 A、B、C 三變數，故

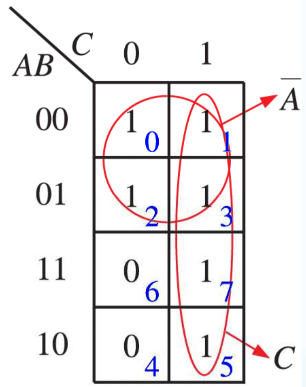
$$x=\overline{A} \quad + \quad \overline{B}C+ABC$$

$=0\times\times+\times01+111$ ；用 0、1 和 x 取代變數

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

0, 1, 2, 3 　1,5 　7 ；轉成十進制

$=\Sigma(0,1,2,3,5,7)$ ；寫成Σ函數



(2)帶入卡諾圖可圈得兩組四組對，如圖所示，故得

$$x=\overline{A}+\overline{B}C+ABC=A+C$$

練習 7　試簡化 $y=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{C}$。

5-4 卡諾圖

隨意條件的化簡

隨意條件“x”可依需要當成0或1。

A	B	C	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	×
1	0	0	×
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

「隨意」

(a)

AB \ C	0	1
00	0 m_0	0 m_1
01	0 m_2	× m_3
11	1 m_6	1 m_7
10	× m_4	1 m_5

A

(b)

隨意條件的處理

5-4 卡諾圖

和項積式卡諾圖的化簡

和項積式卡諾圖的每一方格則代表一組標準和項

$A \backslash BC$	$\bar{B}\bar{C}$ 00	$\bar{B}C$ 01	BC 11	$B\bar{C}$ 10
$\bar{A}$ 0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ m_0	$\bar{A}\bar{B}C$ m_1	$\bar{A}BC$ m_3	$\bar{A}B\bar{C}$ m_2
A 1	$A\bar{B}\bar{C}$ m_4	$A\bar{B}C$ m_5	ABC m_7	$AB\bar{C}$ m_6

(a)積項和式卡諾圖

$A \backslash BC$	BC 00	$B\bar{C}$ 01	$\bar{B}\bar{C}$ 11	$\bar{B}C$ 10
A 0	$A+B+C$ M_0	$A+B+\bar{C}$ M_1	$A+\bar{B}+\bar{C}$ M_3	$A+\bar{B}+C$ M_2
$\bar{A}$ 1	$\bar{A}+B+C$ M_4	$\bar{A}+B+\bar{C}$ M_5	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$ M_7	$\bar{A}+\bar{B}+C$ M_6

(b)和項積式卡諾圖

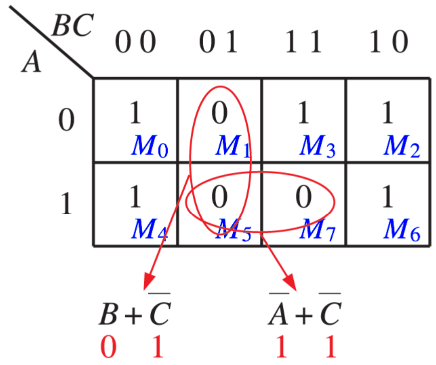
三變數真值表與卡諾圖

5-4 卡諾圖

1.和項積式卡諾圖是以0表原形，1表補數
2.卡諾圖內值的填記與積項和式相同
3. 和項積式則是圈0的方格，最後輸出結果和為每一組對未改變變數的和項乘積

試求下圖所示真值表的最簡和項積式。

A B C	y
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	0



解 (1)將真值表的輸出 y 填入對應的卡諾圖方格中，如圖所示。

(2)將內值為 0 的方格依積項和式的組對圈選要領圈記，可得兩組二組對，其中直立組因只有 B 與 $\overline{C}$ 兩變數未改變（注意：標示 0 表原形，1 表補數），故其組合後的和項，為 $B+\overline{C}$，而橫向組則為 $\overline{A}+\overline{C}$。

(3)其輸出函數則為各組對的和項乘積，即 $y=(B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{C})$。

5-4 卡諾圖

試簡化下列布林代數。

(1) $f_1=(x+y)(\overline{x}+z)(y+z)$

(2) $f_2=(A+B+C+D)(A+B+C+\overline{D})(A+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B)$

解 採標準和項積式還原法，將式中每一和項的變數原形用 0、補數用 1、缺項用 x 來取代，在求取 Π函數後代入卡諾圖化簡。

(1)由 $f_1=(x+y\quad)(\overline{x}+\quad z)(\quad y+z)$

$=(0\ 0\ \times)(1\ \times\ 0)(\times\ 0\ 0)$ ；用 0、1、x 取代變數

$\downarrow\qquad\downarrow\qquad\downarrow$

0, 1　　4, 6　　0, 4 ；將二進數轉成十進制

$=\Pi(0, 1, 4, 6)$ ；轉成Π函數

代入卡諾圖化簡如圖(a)所示，結果為 $f_1=(x+y)(\overline{x}+z)$

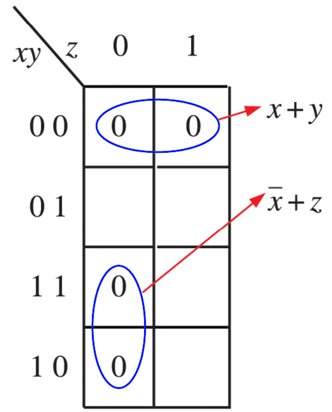
(2)由 $f_2=(A+B+C+D)(A+B+C+\overline{D})(A+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B)$

$=(0000)(0001)(001\times)(10\times\times)$

$=\Pi(0, 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 14, 15)$

代入卡諾圖如圖(b)所示，可得 $f_2=B(\overline{A}+\overline{C})$

(a)



(b)